Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 6

Abhängige Verquickungen

unabhängiger Bausteine

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 2)

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,

und eine faire Münze (mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;

die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten

und F für die faire Münze.

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,

und eine faire Münze (mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;

die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten

und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt,

etwas für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,

und eine faire Münze (mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;

die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten

und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt,

etwas für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

In der Tat lernt man etwas, denn:

Wenn F wie G ausfällt, fällt F eher als Kopf aus, und dann

fällt H wohl auch eher so aus wie F ....

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p-Münzwurfe,

F sei ein einfacher $1/2$-Münzwurf;

G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p-Münzwurfe,

F sei ein einfacher $1/2$-Münzwurf;

G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(G = F) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(H = F) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(G = F, H = F) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{4}$ $\qquad (p^2+q^2)\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} \overset{?}{=} p^2+q^2$

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p-Münzwurfe,

F sei ein einfacher $1/2$-Münzwurf;

G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(G = F) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(H = F) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(G = F, H = F) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}\big((p+q)^2 + (p-q)^2\big) = \tfrac{1}{2}(1 + \underbrace{(p-q)^2}_{\geq 0}) \geq \tfrac{1}{2},$$

mit "=" genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $\{G = F\}$ und $\{Y = F\}$ "positiv korreliert"!

$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

Positiv korrelierte Ereignisse

sind Ereignisse E_1, E_2 mit der Eigenschaft

$$(*) \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$$

Offenbar sind dann E_1 und E_2 nicht unabhängig.

Was bedeutet die Beziehung $(*)$ anschaulich?

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1, \mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1, \mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Dann ist

$$(*) \Longleftrightarrow \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 p_2] > 0$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 I_{E_2} - p_2 I_{E_1} + p_1 p_2] > 0$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0.$$

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1$, $\mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Dann ist

$$(*) \iff \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 p_2] > 0$$
$$\iff \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 I_{E_2} - p_2 I_{E_1} + p_1 p_2] > 0$$
$$\iff \mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0.$$

E_1 und E_2 haben dann also die Tendenz, gemeinsam einzutreten oder gemeinsam nicht einzutreten. Solche Ereignisse E_1 und E_2 nennt man positiv korreliert.